**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**
**CAMPUS SÃO CRISTOVÃO**
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET**
**CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

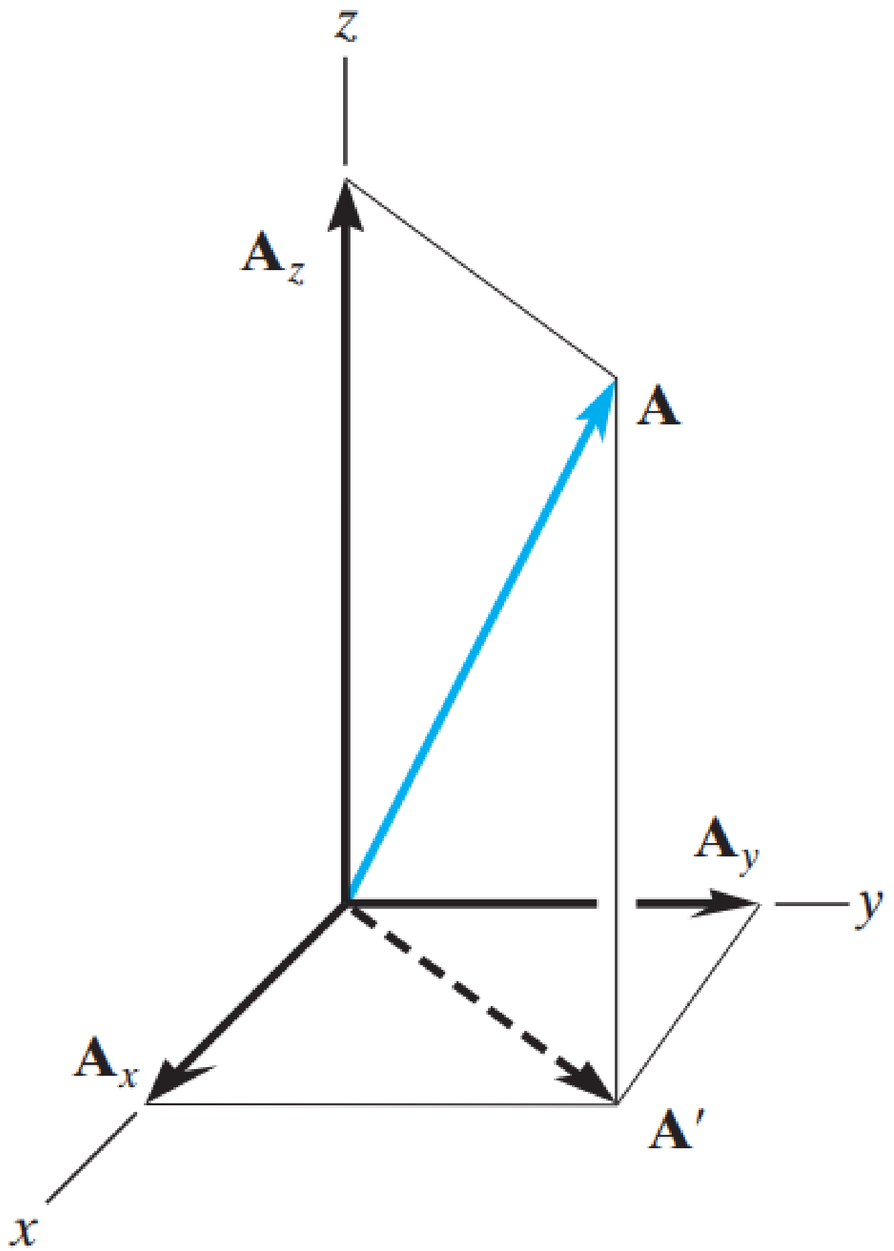
**DISCIPLINA: ESTÁTICA**

# Forças no espaço e vetor unitário

**Prof. Dr : Hélio Cantanhêde**
**e-mail : helio.cantanhede@academico.ufs.br**

# Forças no espaço

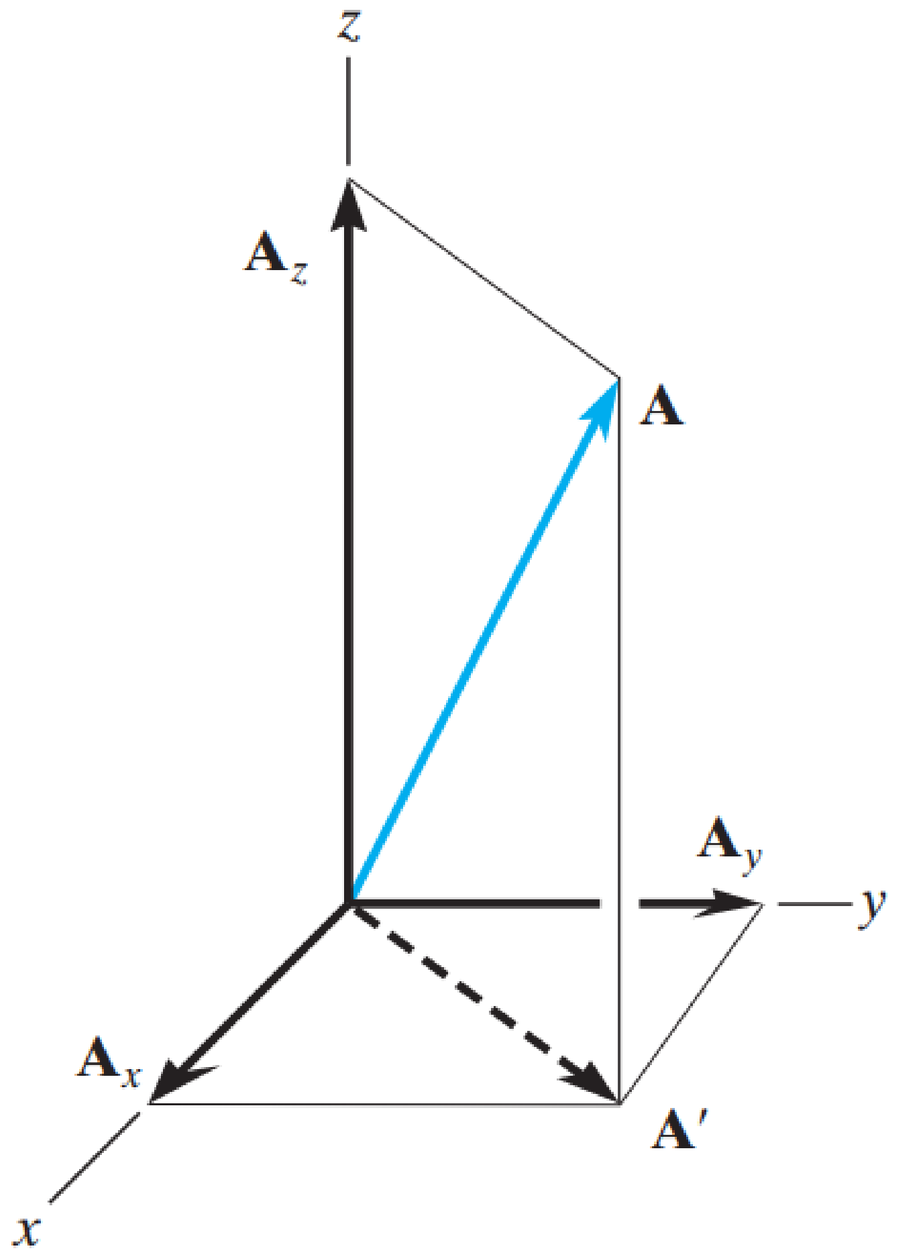
Um vetor A pode ter uma, duas ou três componentes retangulares ao longo dos eixos coordenados x, y, z, dependendo de como o vetor está orientado em relação aos eixos



# Forças no espaço

Em geral, quando A está direcionado dentro de um octante do sistema x, y, z, com duas aplicações sucessivas da lei do paralelogramo pode-se decompô-lo em componentes, e obter:

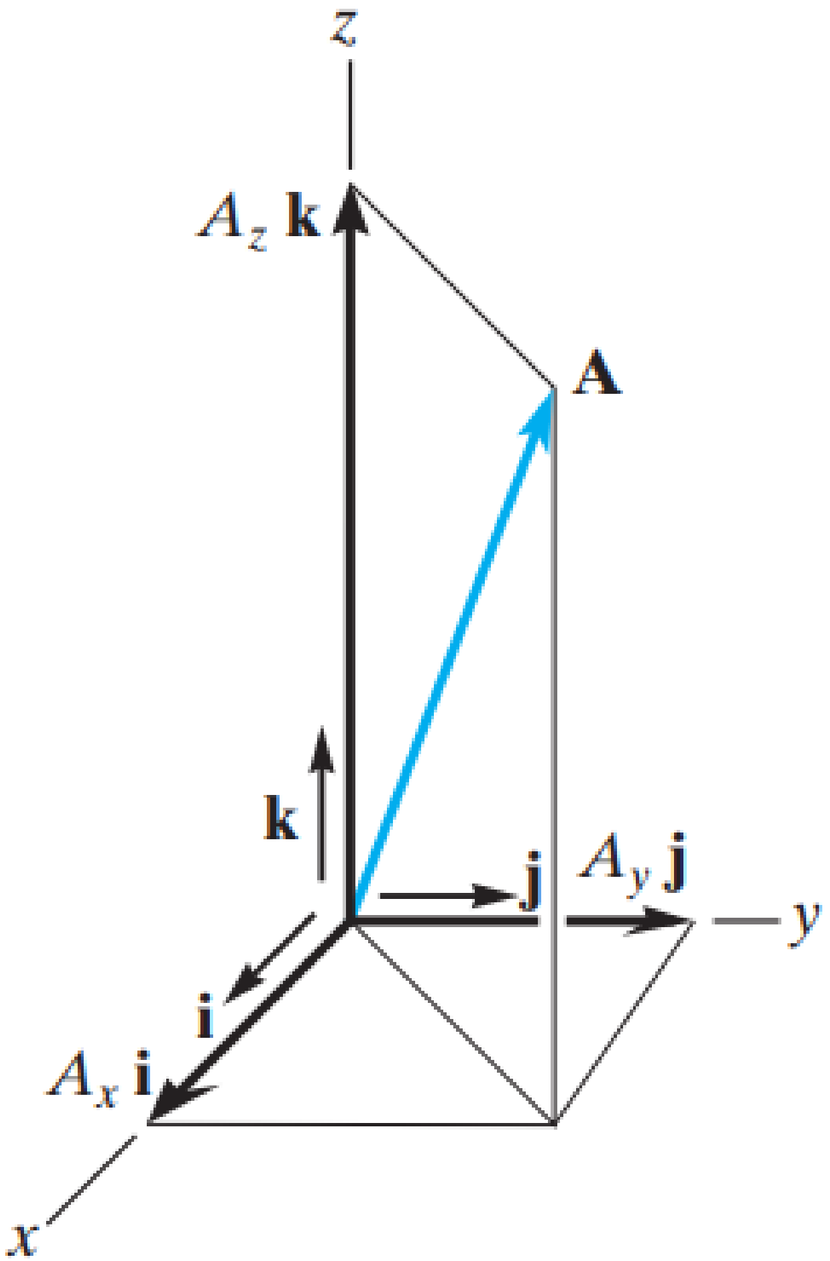
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$$



# Forças no espaço

Como as três componentes de A atuam nas direções positivas de **i**, **j** e **k**, pode-se escrever A na forma de um vetor cartesiano como

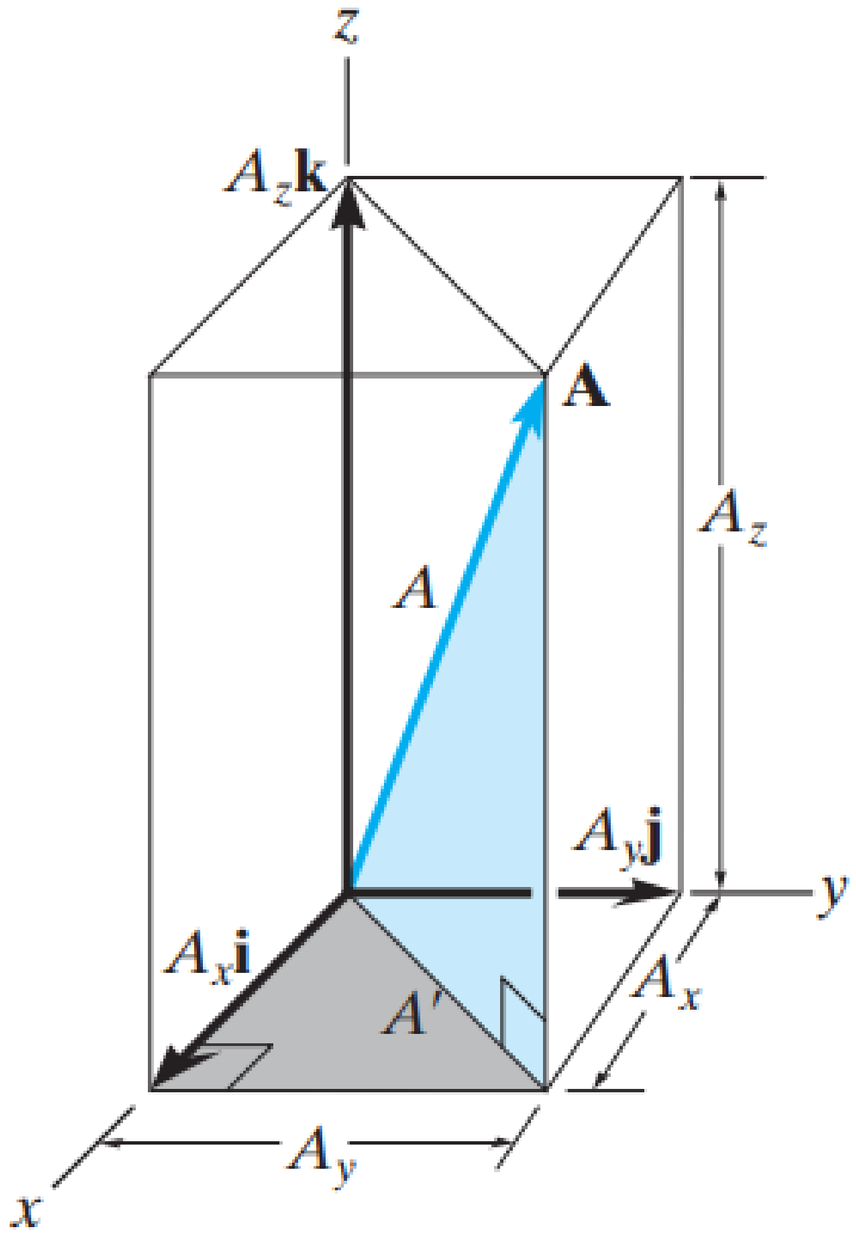
$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$



# Forças no espaço

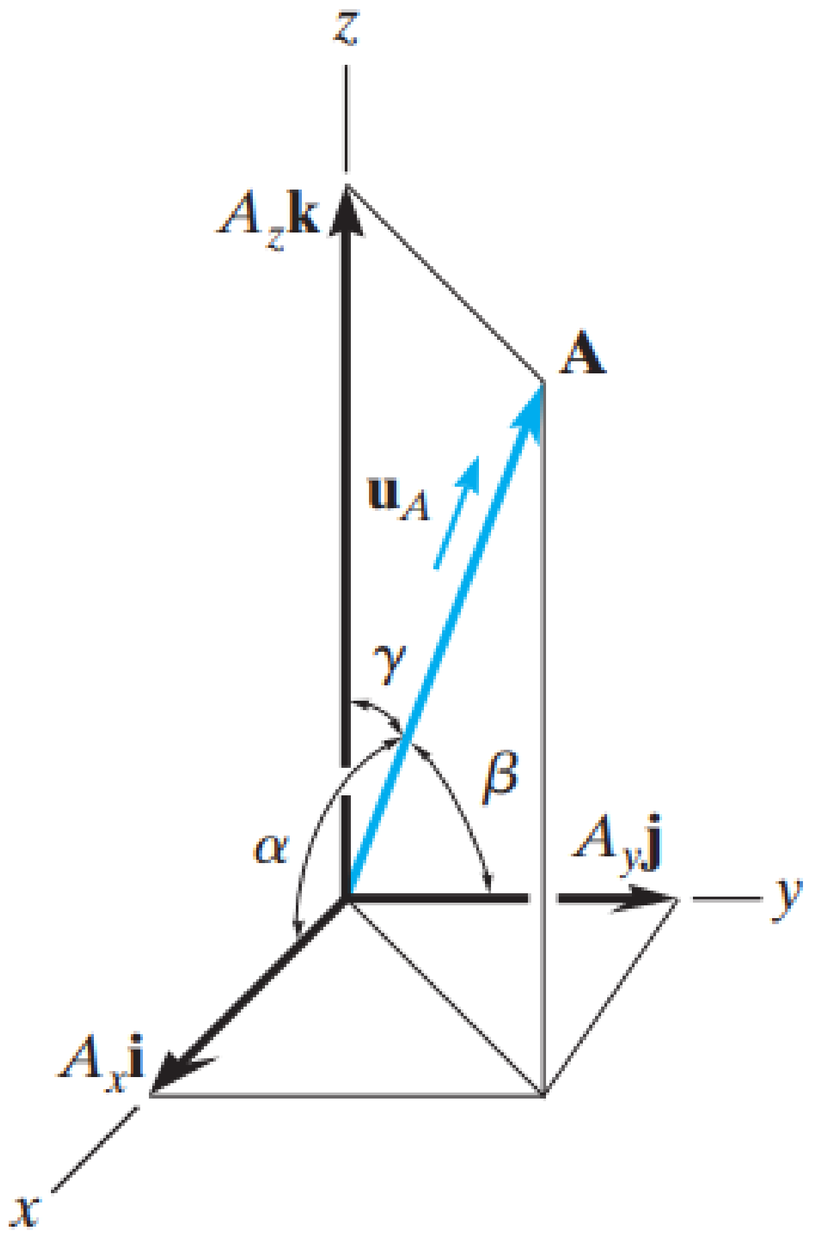
A intensidade do vetor A é igual à raiz quadrada positiva da soma dos quadrados de suas componentes

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



# Ângulos diretores coordenados

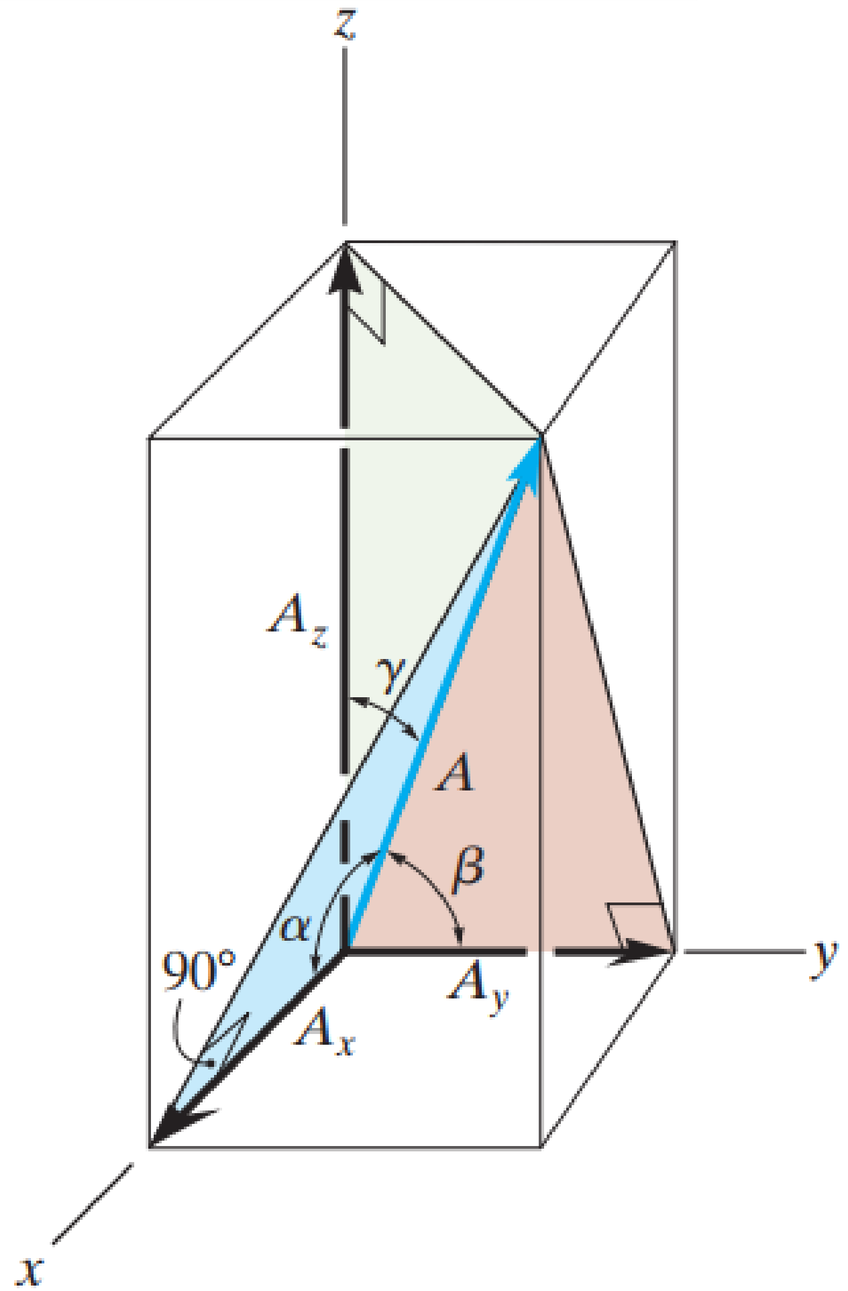
A direção de A é definida pelos ângulos diretores coordenados $\alpha$ (alfa), $\beta$ (beta) e $\gamma$ (gama), medidos entre a origem de A e os eixos x, y, z positivos, desde que estejam localizados na origem de A.



# Ângulos diretores coordenados

Para determinarmos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, vamos considerar as projeções de A sobre os eixos x, y, z.

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

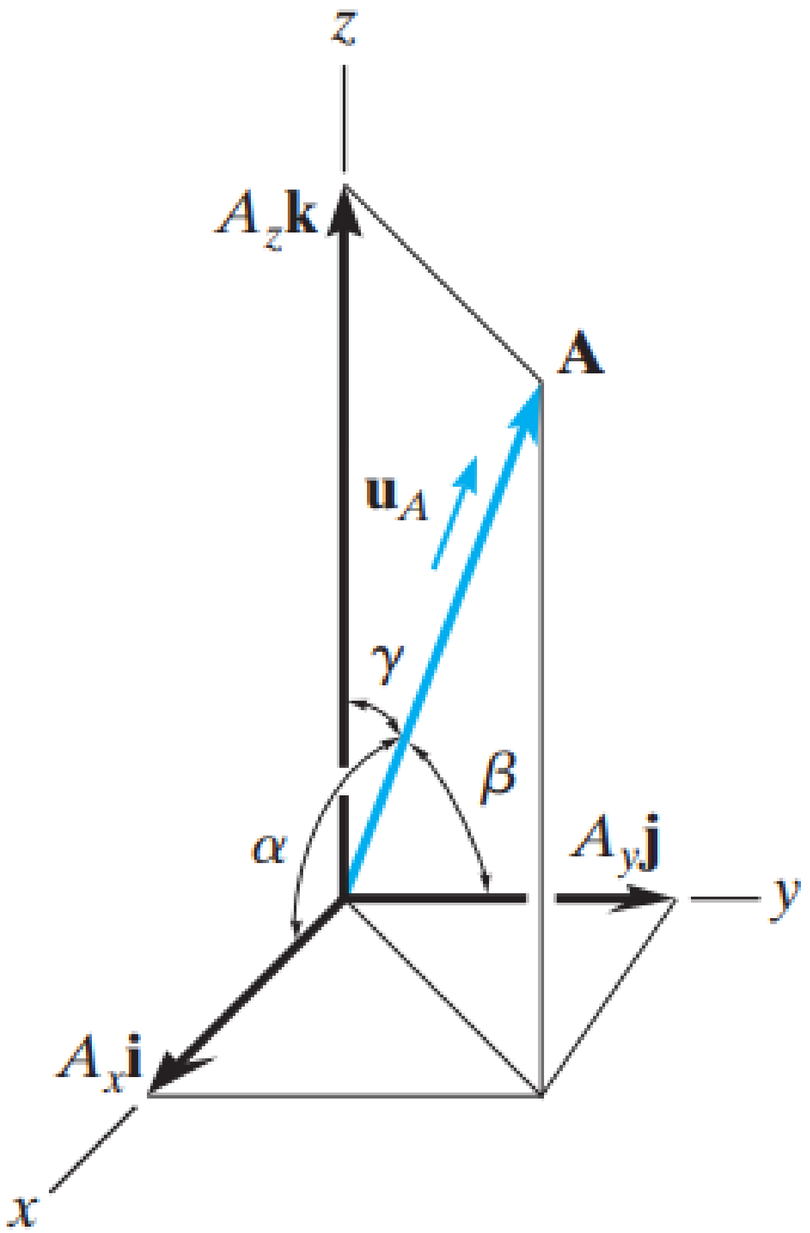


# Ângulos diretores coordenados

Um modo fácil de obter os cossenos diretores é criar um vetor unitário $\boldsymbol{u}_A$ na direção de A. Se **A** for expresso sob a forma de um vetor cartesiano, **A** = Ax**i** + Ay**j** + Az**k**, então $\boldsymbol{u}_A$ terá uma intensidade de um e será adimensional, desde que A seja dividido pela sua intensidade, ou seja

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



# Ângulos diretores coordenados

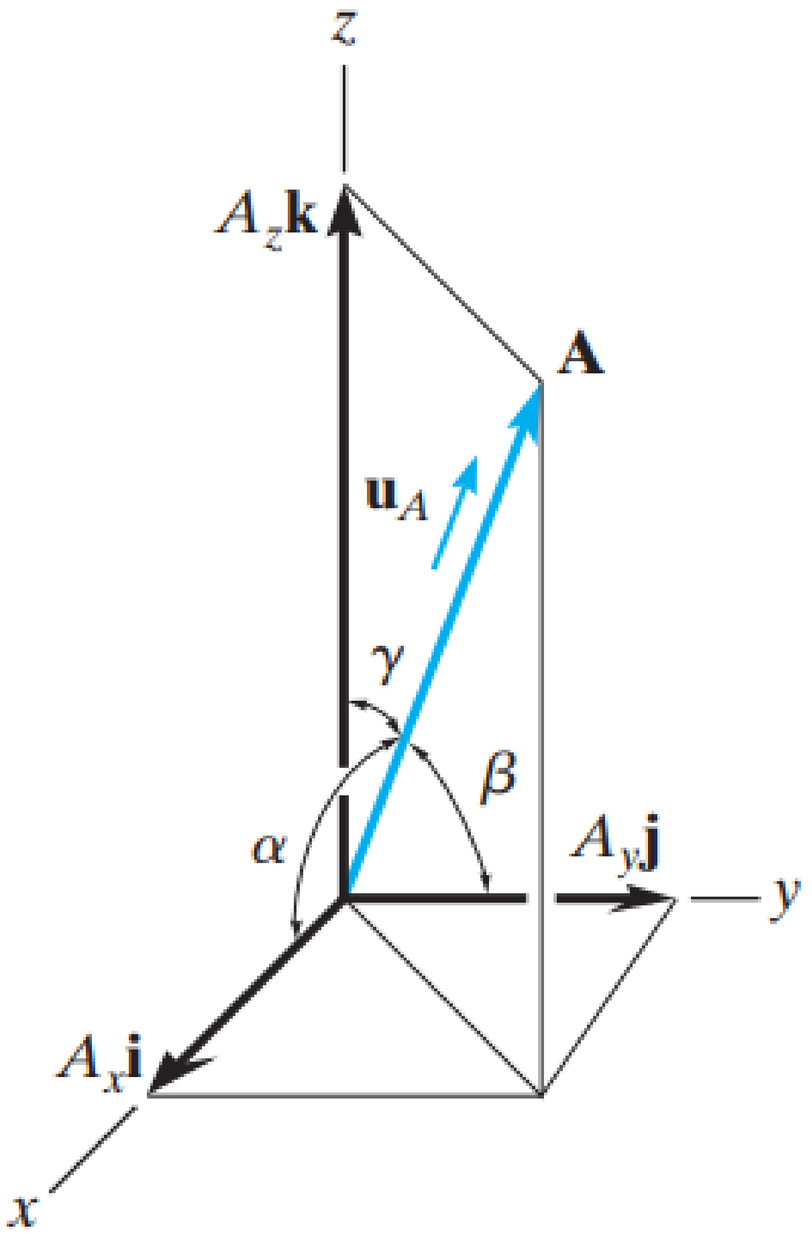
Vemos que as componentes i, j, k de $\boldsymbol{u}_A$ representam os cossenos diretores de A, ou seja:

$$\mathbf{u}_A = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

Pode-se estabelecer a seguinte importante relação entre os cossenos diretores:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Podemos ver que se apenas dois dos ângulos coordenados forem conhecidos, o terceiro pode ser encontrado usando essa equação.



# Ângulos diretores coordenados

Uma outra maneira muito encontrada nas literaturas pode ser expressa como:

$$cos\alpha = \frac{x}{|v|}, cos\beta = \frac{y}{|v|} \text{ e } cos\gamma = \frac{z}{|v|}$$

$$\overrightarrow{v^0} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|})$$

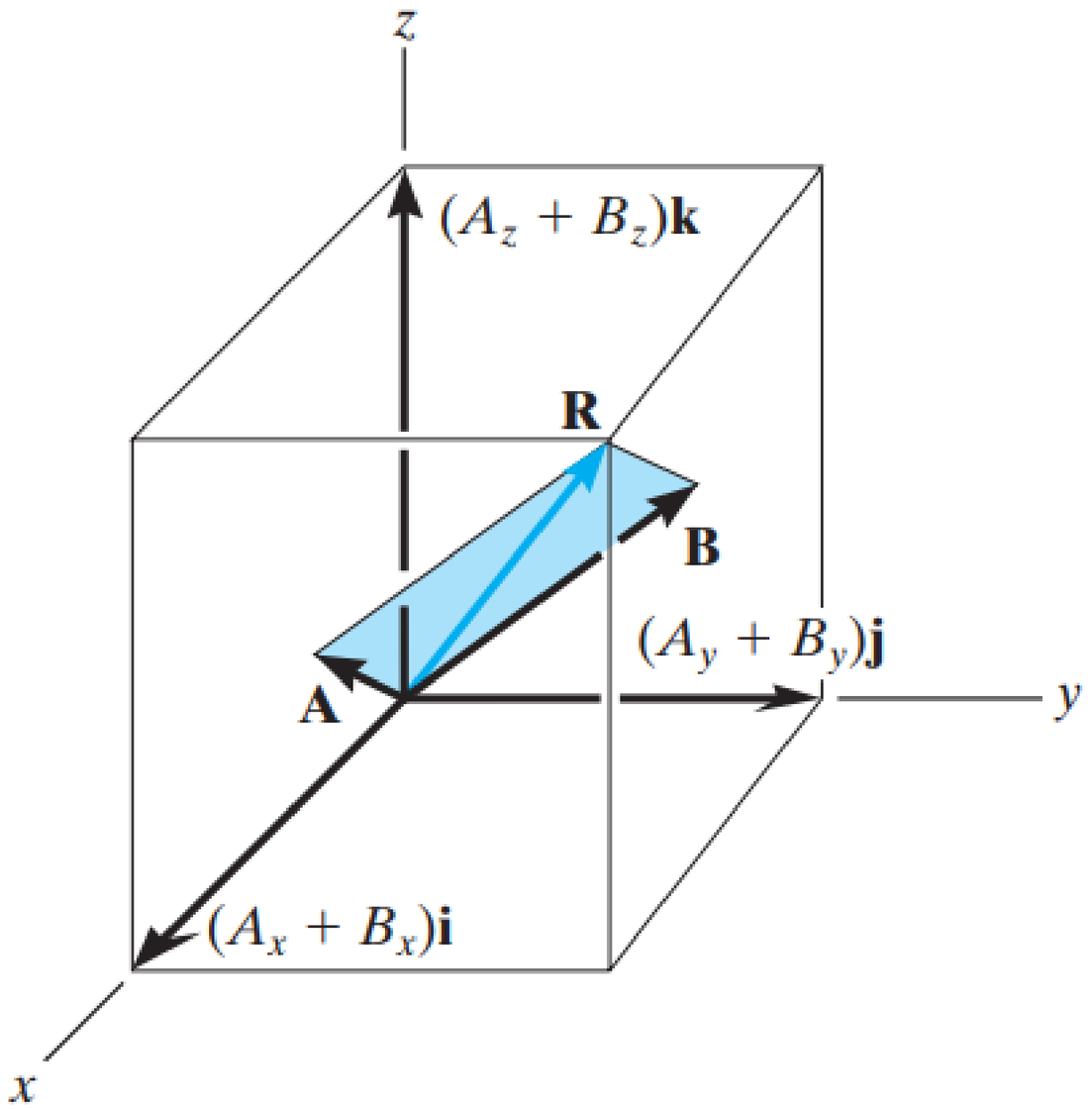
Logo, $\overrightarrow{v^0} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right) = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$

# Adição de vetores cartesianos

A adição (ou subtração) de dois ou mais vetores é bastante simplificada se os vetores forem expressos em função de suas componentes cartesianas.

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k}$$



# Adição de vetores cartesianos

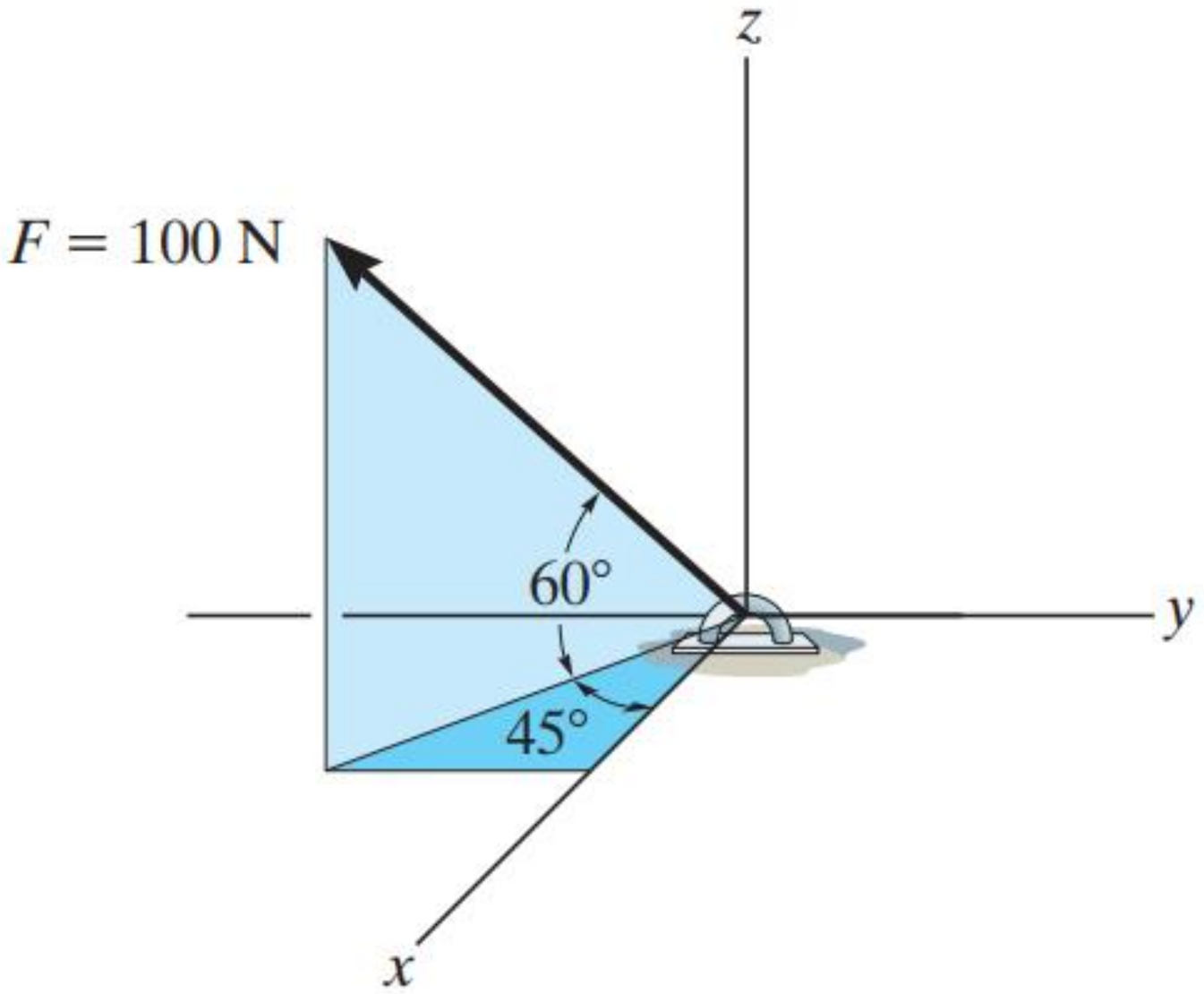
A análise do vetor cartesiano provê um método conveniente para encontrar tanto a força resultante quanto suas componentes nas três dimensões.

# Exemplo 1

A força F tem os componentes Fx = 90 N, Fy = -135 N, Fz = 270 N. Determine sua intensidade F e os ângulos $\theta x$, $\theta y$ e $\theta z$ que essa força forma com os eixos coordenados.

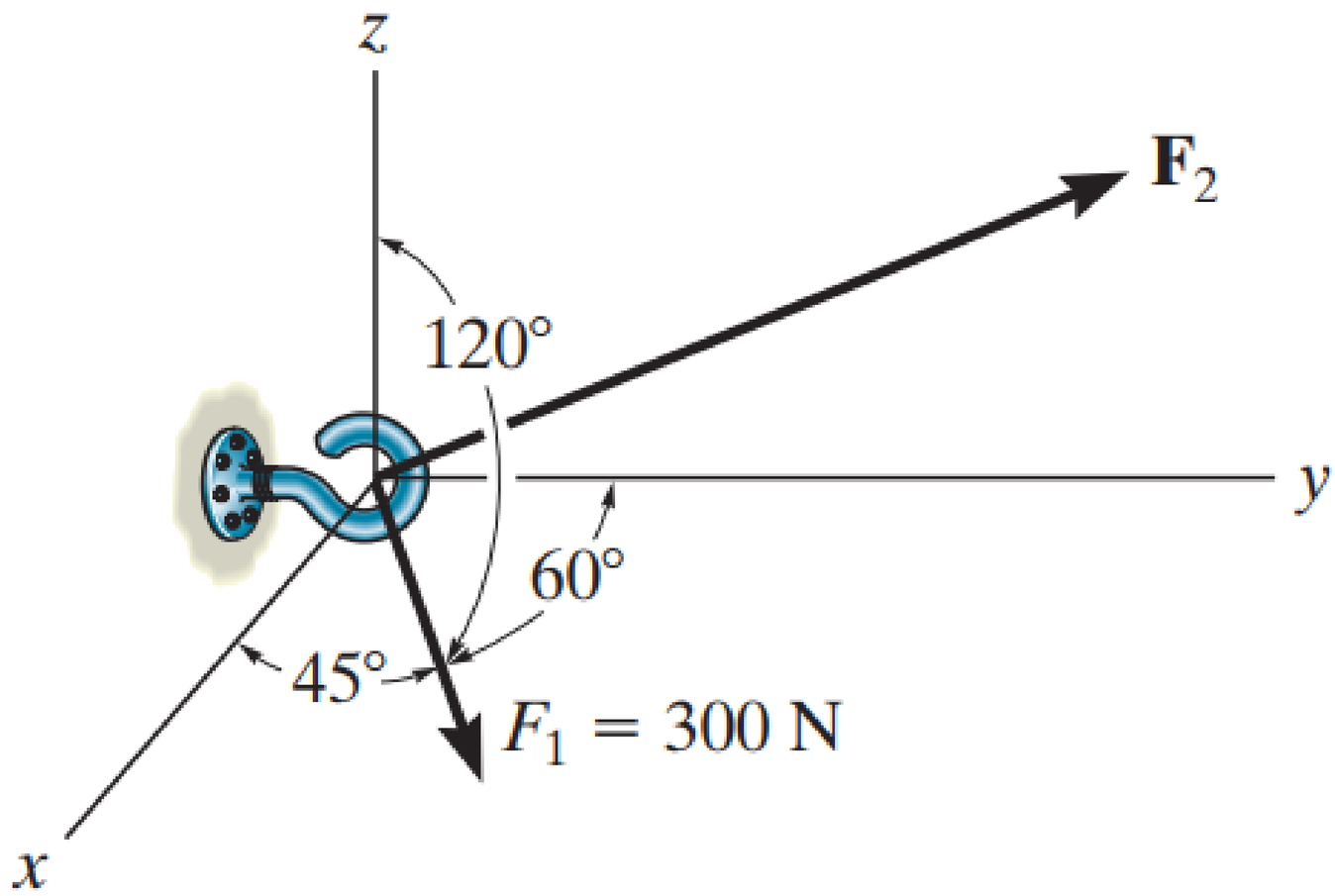
# Exemplo 2

Expresse a força F, mostrada na Figura, como um vetor cartesiano.



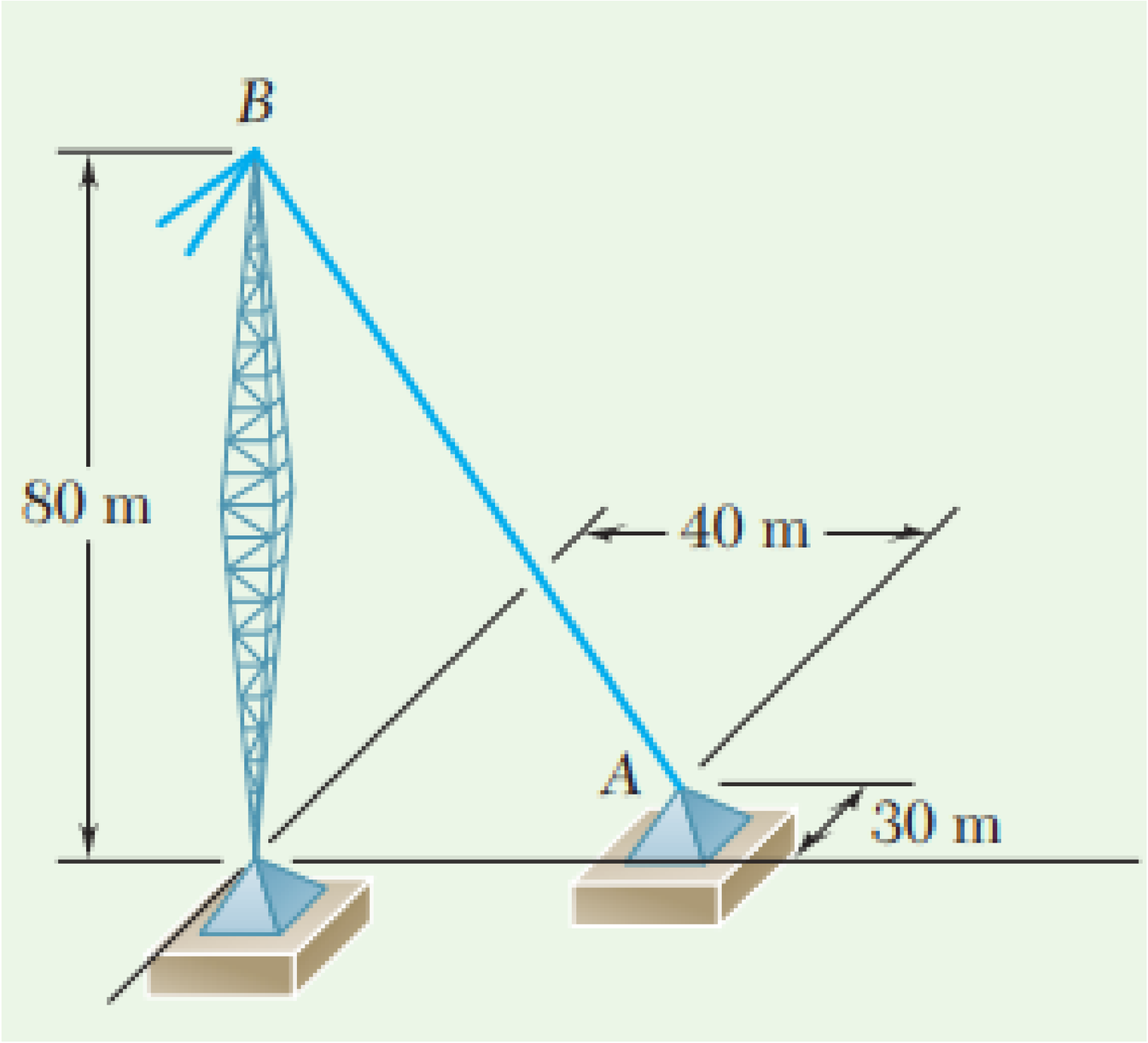
# Exemplo 3

Duas forças atuam sobre o gancho mostrado na Figura. Especifique a intensidade de F2 e seus ângulos diretores coordenados, de modo que a força resultante FR atue ao longo do eixo y positivo e tenha intensidade de 800 N.



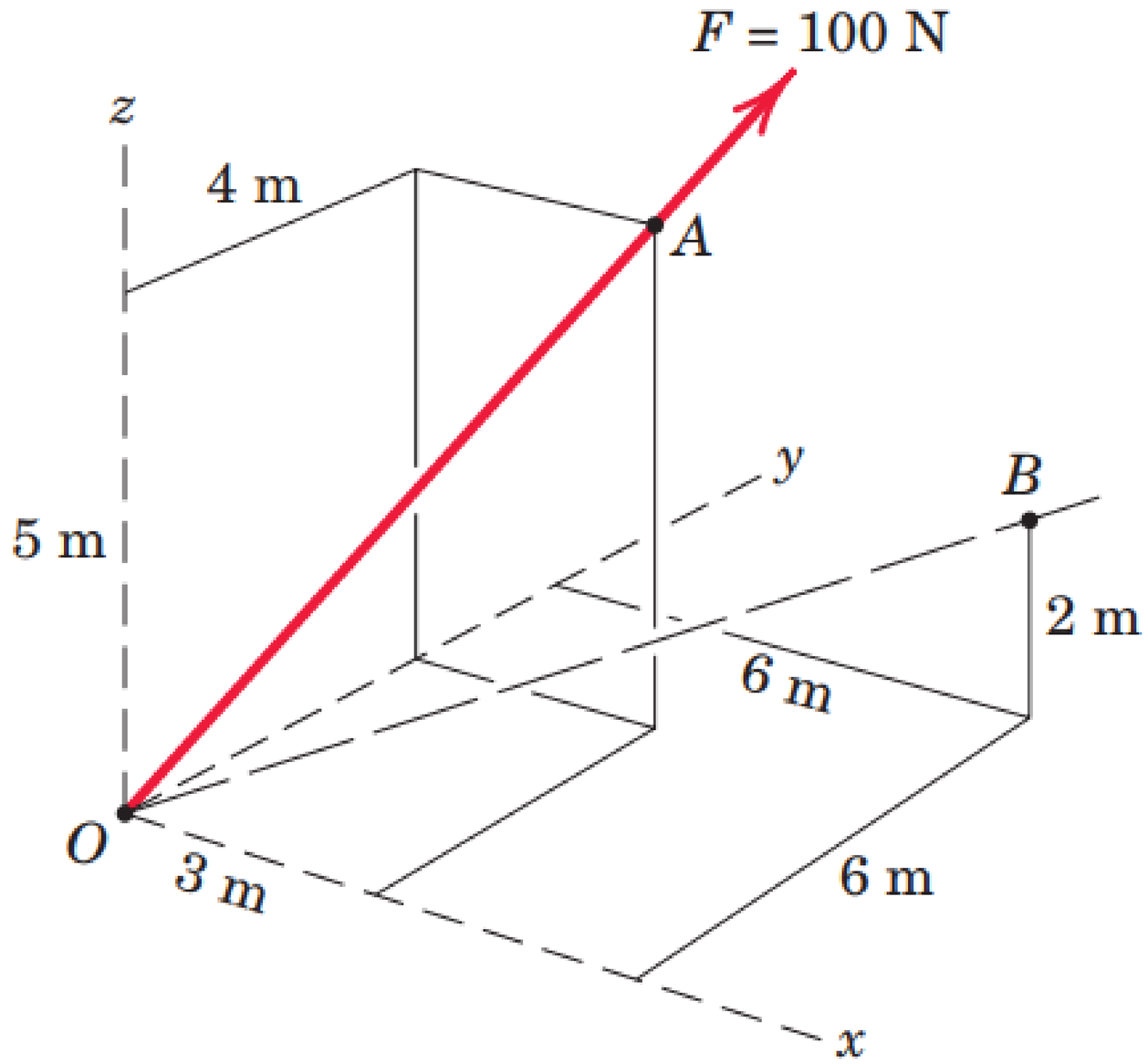
# Exemplo 4

Um cabo de sustentação de uma torre está ancorado por meio de um parafuso em A. A tração no cabo é 2500 N. Determine (a) os componentes Fx, Fy e Fz da força que atua sobre o parafuso e (b) os ângulos θx, θy e θz que definem a direção da força.

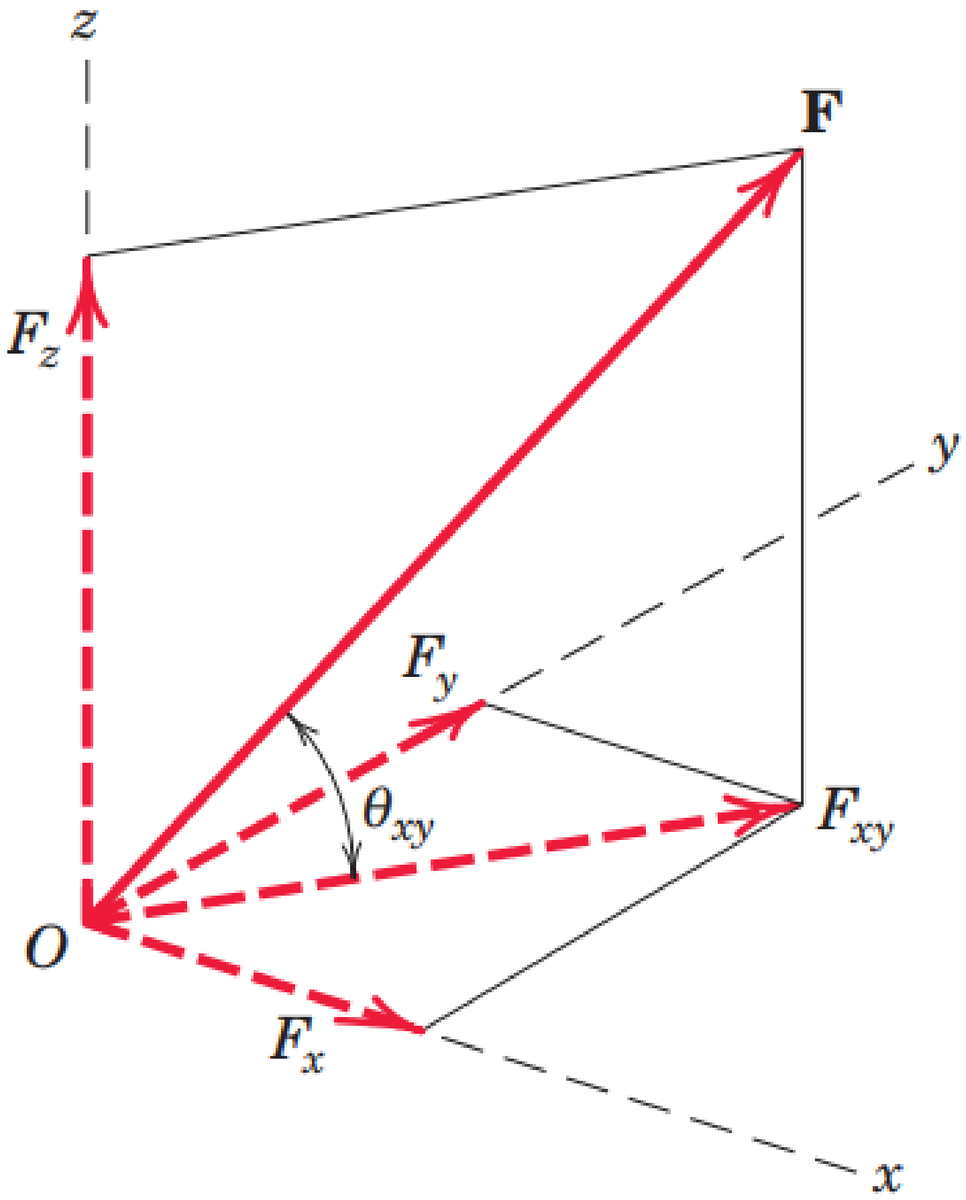


# Exemplo 5

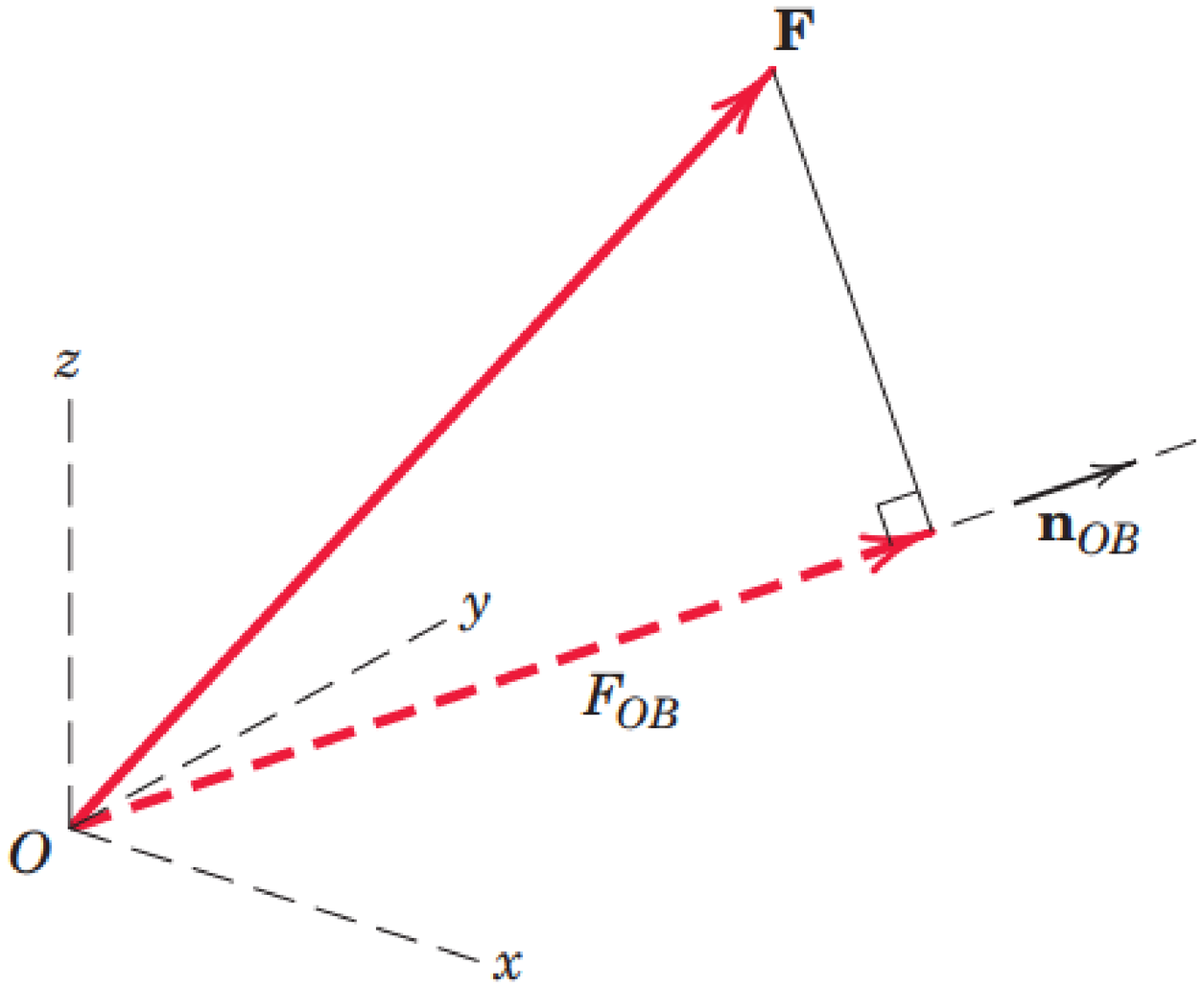
Uma força F com magnitude de 100 N é aplicada na origem O dos eixos x-y-z, como mostrado na figura. A linha de ação de F passa por um ponto A cujas coordenadas são 3 m, 4 m e 5 m. Determine (a) as componentes escalares x, y e z de F, (b) a projeção Fxy de F no plano x-y e (c) a projeção FOB de F ao longo da linha OB.



# Exemplo 5



# Exemplo 5



# Referências


BEER. F. P.; JOHNSTON, E. R., “Mecânica Vetorial para Engenheiros”, Vol. 1, 5°Ed., Editora McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 2011.

MERIAM, J.L.; KRAIGE, L.G., Mecânica – Vol. 1: Estática, 5a Edição, LTC, Rio de Janeiro, 2004.

HIBBELER, R. C.; Estática: Mecânica para engenharia – 12ª Edição, Pearson, São Paulo, 2011.

MELCONIAN, S. “Mecânica Técnica e Resistência dos Materiais”, 11°Ed., São Paulo: Editora Érica, 2000.

SHAMES, I.H.; Estática–Mecânica para Engenharia – Vol. 1, 4ª. Edição, Prentice Hall, São Paulo, 2002.

RILEY, W. F., “Mecânica dos Materiais”. Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 5°Ed., Rio de Janeiro, 2003

BORESI, A. P.; SCHMIDT, R. J. Estática. Pioneira Thomson Learning, 2003.